群整環上の表現加群のヴァーテックスについて (有限群のコホモロジー論とその周辺)

河田, 成人

数理解析研究所講究録
第2061巻 2018年 48-55

群整環上の表現加群のヴァーテックスについて

名古屋市立大学　河田成人

Shigeto Kawata
Nagoya City University

$(K,\ \mathcal{O},\ k)$ を p-モジュラー系（p は素数）とする．すなわち，$\mathcal{O}$ は標数 0 の完備離散付値環で極大イデアル $\pi\mathcal{O}$ を持つもので，その剰余体 $k=\mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ は正標数 p の体であるとし，K は $\mathcal{O}$ の商体とする．R で $\mathcal{O}$ または k を表し，有限群 G の R 上の群環を RG で表す．

直既約 $\mathcal{O}G$-加群 L と kG-加群 $L/\pi L$ の直既約分解 $L/\pi L = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ に対し，ある直既約因子 M_i（$1 \leq i \leq n$）でそのヴァーテックスが L のヴァーテックスに一致するものが存在するかという問題を，Auslander-Reiten quiver と関連付けて考察したい．

有限群の表現論について詳しくは [NT], [B] を参照してください．

1. 群環上の直既約加群のヴァーテックス

ここで RG-加群とは R 上有限生成な右 RG-加群を意味し，RG-表現加群（RG-lattice）とは R-自由な RG-加群を意味するものとする．

H を G の部分群とする．RH-加群 W に対し，誘導された RG-加群 $W{\uparrow}^G = W \otimes_{RH} RG$ を $W{\uparrow}^G$ で表す．また，RG-加群 V に対し，作用を H に制限して RH-加群とみなしたものを $V{\downarrow}_H$ と書く．RG-加群 $U,\ V$ に対して $U \mid V$ と書くことは，U が V のある直和因子に同型であることを表す．

RG-加群 V が次の性質を持つとき，V は **H-射影的**であるという：

> RG-加群の完全列 $U \to V \to 0$ が RH-加群の完全列と見て分裂していれば
> RG-加群の完全列として分裂している．

RG-表現加群 V が $\{1_G\}$-射影的であるとは，V が射影的であることを意味する．

直既約 RG-加群 V に対し，G の部分群の集合

$$\{H \leq G \mid V:\ H\text{-射影的}\}$$

における極小部分群を V の**ヴァーテックス**と呼び，$\mathrm{vx}(V)$ で表す．$\mathrm{vx}(V)$ は G の p-部分群であり，共役を除いて一意的に定まることが知られている．

さて，直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 L に対し，次の性質 $(\star)$ を考える：

$(\star)$　<u>kG-加群 $L/\pi L$ のある直既約因子は $\mathrm{vx}(L)$ をヴァーテックスとして持つ.</u>

性質 $(\star)$ を持つ直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群の例を幾つか挙げてみよう.

群環 RG を環として直既約分解したときの直和因子を**ブロック**と呼ぶ．V が直既約 RG-加群であれば，V は実質的にはあるブロック B 上の加群である．RG のブロック B に対し，G の p-部分群からなる次の集合

$$\{\ \mathrm{vx}(V)\ \mid\ V:\ \text{直既約 } B\text{-加群}\ \}$$

における極大部分群は共役を除いて一意的に定まり，B の**不足群**と呼ばれる．G の Sylow p-部分群の位数を p^s とし，ブロック B の不足群の位数を p^d とする．このとき，B-表現加群 V の階数は p^{s-d} で割り切られるので

$$p^{s-d+\mathrm{ht}(V)}\ \|\ \mathrm{rank}_R V\quad (\ ^{\exists}\mathrm{ht}(V)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\ )$$

と表される．この非負整数 $\mathrm{ht}(V)$ を V の**高さ**と呼ぶ.

例 1.1　$\mathcal{O}G$ のブロック B に属する直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 L は高さが 0 であるとする．このとき，L のヴァーテックスは B の不足群 D に一致する．また，kG-加群 $L/\pi L$ の直既約分解において，ある直既約因子 M は高さが 0 である．従って，M のヴァーテックスは D である．特に，p'-階数の直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 L（すなわち $p\nmid \mathrm{rank}_{\mathcal{O}}L$）のヴァーテックスは G の Sylow p-部分群であり，L は性質 $(\star)$ を持つ.

$Q:=\mathrm{vx}(V)$ を直既約 RG-加群 V のヴァーテックスとすると，

$$S\mid V{\downarrow_Q},\quad V\mid S{\uparrow^G}$$

を満たす直既約 RQ-加群 S が（共役を除いて）一位的に存在する．この S を V の**ソース**と呼ぶ.

例 1.2　Q を G の p-部分群とし，L を自明な $\mathcal{O}Q$-表現加群 $\mathcal{O}_Q$ をソースに持つ $\mathcal{O}G$-表現加群（trivial source $\mathcal{O}G$-lattice）とする．L のヴァーテックスは Q である．このとき，$L/\pi L$ は自明な kQ-表現加群 k_Q をソースに持つ直既約な kG-加群であって，$L/\pi L$ のヴァーテックスは Q である.

これ以降は，p-モジュラー系 $(K,\ \mathcal{O},\ k)$ について次の条件 $(\#)$ を仮定する：

$(\#)$ $(K,\ \mathcal{O},\ k)$ はある p-モジュラー系 $(K',\ \mathcal{O}',\ k')$ の分岐指数 3 以上の拡大であり，$k = k'$ は代数閉体である．

kG-加群 M に対し，M を $\mathcal{O}G$-加群と見做したときの 射影被覆を P_M とし，その核を Z_M とおく：$0 \longrightarrow Z_M \longrightarrow P_M \longrightarrow M \longrightarrow 0$. Z_M を M の **Heller $\mathcal{O}G$-表現加群**と呼ぶ．

条件 $(\#)$ のもとでは，直既約 kG-加群 M の Heller $\mathcal{O}G$-表現加群 Z_M は直既約であることが保証される [K2].

例 1.3 [K2, Proposition 2.2]　直既約 kG-加群の M の Heller $\mathcal{O}G$-表現加群 Z_M のヴァーテックスは M のヴァーテックスに等しく，$Z_M/\pi Z_M \cong M \oplus \Omega M$ が成り立つ．

2. 性質 $(\star)$ を持たない直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群

Feit の本に，直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 L で，kG-加群 $L/\pi L$ は直既約で $\mathrm{vx}(L) \gneqq \mathrm{vx}(L/\pi L)$ となる例が記載されている [F, page 111]. この節では，概分裂列に注目することで性質 $(\star)$ を持たない直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群を見い出せることを紹介したい．

RG-表現加群の短完全列 $\mathcal{A}$： $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \xrightarrow{f} Z \longrightarrow 0$ は次の 3 条件を満たすとき，**概分裂列**と呼ばれる：

(i) $\mathcal{A}$ は分裂していない．
(ii) X, Z は直既約である．
(iii) RG-準同型 $g : W \longrightarrow Z$ が分裂全射でなければ f を通過する．

L が射影的ではない直既約な RG-表現加群ならば，L で終わる概分裂列が一意的に存在することが知られている ([AR], [R]). L の概分裂列を $\mathcal{A}(L) : 0 \longrightarrow \tau L \longrightarrow m(L) \longrightarrow L \longrightarrow 0$ と表すことにする．Auslander-Reiten translator τ は，$R = \mathcal{O}$ のときは $\tau = \Omega$（Heller operator）であり，$R = k$ のときは $\tau = \Omega^2$ である．次の命題で述べるように，概分裂列によって Heller 表現加群は特徴付けられる．

$\mathcal{O}G$-表現加群の短完全列 $\mathcal{S}$： $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ から導かれる kG-加群の短完全列 $0 \longrightarrow X/\pi X \longrightarrow Y/\pi Y \longrightarrow Z/\pi Z \longrightarrow 0$ を $\overline{\mathcal{S}}$ で表す．

命題 2.1 [K2, Theorem 4.4]　p-モジュラー系 $(K,\ \mathcal{O},\ k)$ は条件 $(\#)$ を満たすとする．

(1) 直既約 kG-加群 M の Heller $\mathcal{O}G$-表現加群 Z_M について次が成り立つ：

$$\overline{\mathcal{A}(Z_M)} = \mathcal{A}(M) \oplus [\text{分裂列 } 0 \to \Omega M \to \Omega M \oplus \Omega M \to \Omega M \to 0]$$

(2) 直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 L が Heller 表現加群でなければ，$\overline{\mathcal{A}(L)}$ は分裂する．

例 2.2　$Q\ (\neq 1)$ を G の正規 p-部分群とし，直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 T は自明な $\mathcal{O}Q$-表現加群をソースに持つとする．このとき，T のヴァーテクスは Q である．T の概分裂列 $\mathcal{A}(T)$ の中間項を $m(T)$ とおく．また，T が属するブロック B は無限表現型と仮定する．すなわち，B は互いに非同型な直既約 $\mathcal{O}Q$-表現加群を無限個持つとする．このとき，$m(T)$ は直既約である [K4, Theorem 3.1]．さらに，kG-加群 $T/\pi T$ は既約ではないと仮定しよう．すると

$$\mathrm{vx}(T) \lneqq \mathrm{vx}(m(T))$$

が成り立つ ([IH], [K4, Lemma 2.6])．また，$T/\pi T$ は直既約であるので，例 1.3 から，T は Heller $\mathcal{O}Q$-表現加群ではない．従って，命題 2.1(2) から $\overline{\mathcal{A}(T)}$ は分裂する．すなわち

$$m(T)/\pi m(T) \cong T/\pi T \oplus \Omega T/\pi \Omega T$$

ここで $T/\pi T$ は自明な kQ-加群をソースに持ち，ヴァーテックスは Q である．$\Omega T/\pi\Omega T \cong \Omega(T/\pi T)$ のヴァーテックスも Q なので，$m(T)$ は性質 $(\star)$ を持たない．

注意 2.3　G が p-群で $T := \mathcal{O}_Q{\uparrow}^G$　$(1 \lneqq Q \lneqq G)$ の場合は，$\mathrm{vx}(m(T)) = G$ であることが Inoue-Hieda によって示されている [IH, Proposition 3.2]．

P と $Q\ (\neq 1)$ は G の p-部分群で，Q は P の真の正規部分群であるとする．$T := \mathcal{O}_Q{\uparrow}^P$ とし，$S := m(T)$（T の概分裂列の中間項）とおく．このとき例 2.2 と注意 2.3 から $\mathcal{O}P$-表現加群 S のバーテックスは P で，$S/\pi S$ の各直既約因子のバーテックスは Q である．いま X は直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群で S を P-ソースに持つものとする．このとき，X は性質 $(\star)$ を持たず，$X/\pi X$ のある直既約因子のヴァーテックスは Q であり，その他の直既約因子についても，それらのヴァーテックスは Q に含まれる．このことは，次の事実の一例と言える．

命題 2.4　P と $Q\ (\neq 1)$ は G の p-部分群で，Q は P の真の正規部分群であるとする．このとき，次の性質 (i), (ii) を持つ直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 X が存在する：

(i) $\mathrm{vx}(X) = P$.

(ii) kG-加群 $X/\pi X$ の各直既約因子のヴァーテックスは Q に含まれ，それらのうちの少なくとも一つは Q に一致する．

3. Auslander-Reiten 連結成分とヴァーテックス

概分裂列と Auslander-Reiten quiver は密接な関係がある．この節では Auslander-Reiten quiver に注目して，直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群のヴァーテックスを考察しよう．

群環 RG の **Auslander-Reiten quiver** $\Gamma(RG)$ とは，直既約 RG-表現加群の同型類の全体を点集合とし，直既約 RG-表現加群 L から L' に既約写像と呼ばれる RG-準同型写像が存在するときに矢 $L \longrightarrow L'$ を引くことで描かれる有向グラフのことである．ここで $f : L \longrightarrow L'$ が**既約写像**とは，$f = g \circ h$ と写像の積の形で書けるのは g が分裂単射であるか h が分裂全射であるかのいずれか自明な場合しかないときをいう．Auslander-Reiten 理論については，[ASS], [ARS], [E1], [W], [Y] を参照してください．

$\Gamma(RG)$ の連結成分 Θ を Auslander-Reiten 成分と呼び，Θ の stable part （Θ から射影加群（=入射加群）を取り除いて得られる有向グラフ）を Θ_s と書く．G の部分群からなる集合

$$\{ \operatorname{vx}(L) \mid L \in \Theta_s \}$$

には極小なものが共役を除いて唯一存在する ([K1, Propositon 3.2], [IH]) が，それを Θ の**ヴァーテックス**と呼び，$\operatorname{vx}(\Theta)$ と書く．

モジュラー表現（$R = k$）の場合に，Okuyama–Uno によって次の定理が示された．

定理 3.1[OU]　群多元環 kG のブロック B の Auslander-Reiten 成分 Δ の tree class が A_∞ であれば，次のいずれかが成り立つ：

(i) $\{\operatorname{vx}(X) \mid X \in \Delta_s\} = \{Q\}$.

(ii) $\{\operatorname{vx}(X) \mid X \in \Delta_s\} = \{Q,\ P\}$, $Q \lneqq P$.

なお (ii) の場合，Δ のグラフの端に位置する直既約 kG-加群のヴァーテックスは Q であり，Δ の端に位置しない直既約 kG-加群のヴァーテックスは P である．

ちなみに，kG のブロック B が wild 表現型であれば，B の任意の Auslander-Reiten 成分の tree class は A_∞ であることが Erdmann によって示された [E2]．宇野-奥山の定理を踏まえて，整数表現における Auslander-Reiten quiver $\Gamma(\mathcal{O}G)$ の連結成分 Θ に対し，$\{\operatorname{vx}(X) \mid X \in \Theta_s\}$ について考察したい．Θ のヴァーテックス $\operatorname{vx}(\Theta)$ について次が言える．

命題 3.2 [K6, 定理 2.5]　射影的ではない直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 L は性質 $(\star)$ を持つとし，L を含む Auslander-Reiten 成分を Θ とする．Θ が Heller $\mathcal{O}G$-表現加群を含まなければ，$\mathrm{vx}(L) = \mathrm{vx}(\Theta)$ が成り立つ．

まず，群整環 $\mathcal{O}G$ のブロックの Auslander-Reiten 成分 Θ で $\{\mathrm{vx}(X) \mid X \in \Theta_s\} = \{Q\}$ となる例を挙げる．

例 3.3　L を高さが 0 の直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群とし，L を含む Auslander-Reiten 成分を Θ とする．L が属するブロック B が無限表現型であれば，Θ は Heller 表現加群を含まない：実際，もし Θ が Heller 表現加群を含めば，Θ に含まれるすべての直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群の階数が $|G|_p$ で割り切れる [K5, Lemma 2.4(1)] が，L の高さが 0 であることに矛盾する．ところで，例 1.1 で見たように L は性質 $(\star)$ を持つので，命題 3.2 から Θ_s の任意の直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 X に対し $\mathrm{vx}(L) = D \leq \mathrm{vx}(X)$（ここに D は B の不足群）が言えて，$D = \mathrm{vx}(X)$ が成り立つ．すなわち，$\{\mathrm{vx}(X) \mid X \in \Theta_s\} = \{D\}$ が従う．特に，L が p'-階数の直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群であれば $\{\mathrm{vx}(X) \mid X \in \Theta_s\} = \{\text{Sylow } p\text{-部分群}\}$ である．

以下で，群整環 $\mathcal{O}G$ の Auslander-Reiten 成分 Θ で $\{\mathrm{vx}(X) \mid X \in \Theta_s\} \supseteq \{Q,\ P\}$ $(Q \lneqq P)$ となる例を挙げよう．例 2.2 と Auslander-Reiten 成分にまつわる Green 対応 [K6, 系 2.10] を考え合わせると，次が分かる．

例 3.4　Q を G の p-部分群とし，$\mathcal{O}Q$-表現加群 T は自明な $\mathcal{O}Q$-表現加群をソースに持つとする．さらに，T が属するブロック B は無限表現型とし，T の Green 対応子 fT について $fT/\pi fT$ は既約な kG-加群でないとする．このとき，T の概分裂列の中間項 $m(L)$ は直既約であり，$\mathrm{vx}(T) \lneqq \mathrm{vx}(m(T))$ が成り立つ．すなわち，T と $m(T)$ を含む Auslander-Reiten 成分を Θ とすると，次が言える：

$$\{\mathrm{vx}(X) \mid X \in \Theta_s\} \supseteq \{\mathrm{vx}(T),\ \mathrm{vx}(m(T))\} \quad (\text{ここで } \mathrm{vx}(T) \lneqq \mathrm{vx}(m(T)))$$

またこのとき，Θ は A_∞ 型であり，T は Θ の端に位置している [K4, Theorem 3.1]．

最後に，宇野-奥山の定理 3.1 (ii) の Auslander-Reiten 成分 Δ に注目し，Δ の端に位置する kG-加群の Heller $\mathcal{O}G$-表現加群を含む Auslander-Reiten 成分を考えたい．

例 3.5 直既約 kG-加群 M は A_∞ 型の Auslander-Reiten 成分 Δ の端に位置しているとし，$\mathrm{vx}(M) = Q$ とする．また，M の概分裂列 $\mathcal{A}(M)$ の中間項 $m(M)$ は直既約で，$\mathrm{vx}(m(M)) = P \gneqq Q$ とする．Z_M を M の Heller $\mathcal{O}G$-表現加群とする．$\mathcal{A}(Z_M)$ の中間項 $m(Z_M)$ は直既約である [K3, Theorem 5.1] が，命題 2.1(1) から，$m(M)$ が $m(Z_M)/\pi m(Z_M)$ の直既約因子として現れる．従って，$\mathrm{vx}(m(Z_M)) \geqq \mathrm{vx}(m(M)) = P \gneqq Q$ を得る．また，例 1.3 から $\mathrm{vx}(Z_M) = Q$ である．従って，Z_M と $m(Z_M)$ を含む Auslander-Reiten 成分 Θ とすると，次が言える：

$$\{\mathrm{vx}(X) \mid X \in \Theta_s\} \supseteq \{Q = \mathrm{vx}(Z_M),\ \mathrm{vx}(m(Z_M))\} \quad (\text{ここで } Q \lneqq \mathrm{vx}(m(Z_M)))$$

なおこのとき，Θ は A_∞ 型であり，Z_M は Θ の端に位置している [K3, Theorem].

参考文献

[ASS] Assem, I., Simson, D. and Skowroński, A.: Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol. 1, Techniques of Representation Theory, London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 65, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

[AR] Auslander, M. and Reiten, I.: *Representation theory of artin algebras V: Methods for computing almost split sequences and irreducible morphisms*, Comm. Algebra **5**(1977), 519–544.

[ARS] Auslander, M., Reiten, I. and Smalø, S.: Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge Studies in Advanced Math. 36, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[B] Benson, D. J.: Representations and Cohomology I, Cambridge Studies in Advanced Math. 30, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[E1] Erdmann, K.: Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras, Lecture Note in Math. 1428, Springer, Berlin/New York, 1990.

[E2] Erdmann, K.: *On Auslander-Reiten components for group algebras*, J. Pure Appl. Algebra **104**(1995), 149–160.

[F] Feit, W.: The Representation Theory of Finite Groups, North-Holland Mathematical Library 25, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1982.

[IH] Inoue, T. and Hieda, Y.: *A note on Auslander-Reiten quivers for integral group rings*, Osaka J. Math. **32**(1995), 483–494.

[K1] Kawata, S.: *Module correspondence in Auslander-Reiten quivers for finite groups*, Osaka J. Math. **26**(1989), 671–678.

[K2] Kawata, S.: *On Heller lattices over ramified extended orders*, J. Pure Appl. Algebra **202**(2005), 55–71, *Erratum to "On Heller lattices over ramified extended orders"*, J. Pure Appl. Algebra **212**(2008), 1849–1851.

[K3] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and Heller lattices for integral group rings*, Algebr. Represent. Theory **9**(2006), 513–524.

[K4] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and trivial source lattices for integral group rings*, J. Algebra **322**(2009), 1395–1405.

[K5] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and height zero lattices for integral group rings*, Algebr. Represent. Theory **17**(2014), 1603–1613.

[K6] 河田成人: 群環の表現加群のヴァーテックスと Auslander-Reiten 連結成分について, 京都大学数理解析研究所講究録 「有限群・代数的組合せ論・頂点作用素代数の研究」(出版予定).

[NT] 永尾汎, 津島行男: 有限群の表現, 裳華房, 1987.

[OU] Okuyama, T. and Uno, K.: *On the vertices of modules in the Auslander-Reiten quiver III*, in: Groups and combinatorics - in memory of Michio Suzuki, 355–368, Adv. Stud. Pure Math., 32, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.

[R] Roggenkamp, K. W.: *The construction of almost split sequences for integral group rings and orders*, Comm. Algebra **5**(1977), 1363–1373.

[Y] 山形邦夫: 有限次元自己入射多元環の表現とその周辺, 数学 **61**(2009), 270–292.